Résumé 03 : Rappels sur les $o, O, \sim$

▷ **DEFINITIONS de $o, O, \sim$:**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On dit que

1. $\boxed{u_n = O(v_n)}$ lorsque la suite $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right) n \in \mathbb{N}$ est majorée.
   C'est équivalent à l'existence d'une suite (b_n) **bornée** telle que $\forall n, u_n = b_n v_n$.
2. $\boxed{u_n = o(v_n)}$ lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right) n \in \mathbb{N}$ tend vers 0.
   C'est équivalent à l'existence d'une suite (a_n) **de limite nulle** telle que $\forall n, u_n = a_n v_n$.
3. $\boxed{u_n \sim v_n}$ lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right) n \in \mathbb{N}$ tend vers 1, ou bien lorsque $u_n - v_n = o(v_n)$.
   C'est équivalent à l'existence d'une suite (b_n) **de limite** 1 telle que $\forall n, u_n = c_n v_n$.

▷ **Cas des suites constantes :**

- $u_n = o(1) \iff$ la suite (u_n) tend vers 0.
- $u_n = O(1) \iff$ la suite (u_n) est bornée.
- Pour tout $c \in \mathbb{C}$ non nul, $u_n \sim c \iff 0$ la suite (u_n) tend vers c.
  Aucune suite autre que les suites nulles APCR n'est équivalente à 0. Si vous tombez $u_n \sim 0$, c'est probablement que vous aurez sommé deux équivalents.

▷ **Propriétés de calcul des $\sim$:**

- `~ est réflexive, symétrique, transitive`
  1. $u_n \sim u_n$.
  2. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
  3. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
- `~ et opérations`
  1. Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors $u_n a_n \sim v_n b_n$.
  2. Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors $\frac{u_n}{a_n} = \frac{v_n}{b_n}$.
  3. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ si α est un réel indépendant de n.

  Les équivalents peuvent donc être multipliés, divisés, élevés à une puissance constante. Attention, c'est faux pour un exposant qui dépend de n. En effet, $1 + 1/n \sim 1$, mais leurs puissances $n-$ièmes ne sont pas équivalentes.
- `Equivalents et signes :`
  $$u_n \sim v_n \Rightarrow \ u_n \text{ et } v_n \text{ sont de même signe APCR.}$$
- `Equivalents et limites :`
  $$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \ell$$
- `11ème commandement :`**Les équivalents, tu ne sommeras point.**
  Par exemple $u_n = n^2 + n \sim n^2$ et $v_n = -n^2 + n \sim -n^2$ mais....
  Si l'on est tentés par cette somme, on transforme $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ en $u_n = a_n + o(a_n)$ et $v_n = b_n + o(b_n)$. On pourra alors sommer ces égalités pour obtenir $u_n + v_n = a_n + b_n + o(a_n) + o(b_n)$; Il suffira alors de simplifer cette somme de o à l'aide des propriétés ci-dessous.
  Exemple : Trouver un équivalent de $\sin(1/n) + \tan(\sqrt{2}/n)$.
  Autre erreur à ne pas commettre :
  $$u_n \sim v_n \text{ n'implique pas } f(u_n) \sim f(v_n).$$

▷ **Propriétés de calcul des o, O :**

- `Combinaisons linéaires :`

$$\begin{cases} u_n = o(a_n) \\ v_n = o(a_n) \end{cases} \Longrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, au_n + bv_n = o(a_n).$$

- `Produits d'un` o `par une suite :`

$$\boxed{a_n o(b_n) = o(a_n b_n)}$$

- `Produits de deux` o `:`

$$\boxed{o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n)}$$

- `Simplification par une contante :`

$$\forall c \neq 0, \boxed{o(ca_n) = o(a_n) \text{ et } co(a_n) = o(a_n)}.$$

- `Transitivités :` Si $b_n = o(a_n)$ et $c_n = o(b_n)$, alors $c_n = o(a_n)$, i.e

$$\boxed{o\big(o(a_n)\big) = o(a_n)}, \boxed{o\big(O(a_n)\big) = o(a_n)}, \boxed{O\big(o(a_n)\big) = o(a_n)}.$$

- `Simplification de la fonction de référence :`

$$\boxed{a_n \sim b_n \Rightarrow o(a_n) = o(b_n) \text{ et } O(a_n) = O(b_n)}.$$

Exemple : $o\big(n + \ln n\big) = o(n)$.
- `Sommes de` o `:`

$$\boxed{o(a_n) + o(b_n) = o(a_n) \text{ si } b_n = O(a_n)}$$

Exemples : $o(n^2) + o(n) = o(n^2), o(n) + o(n) = o(n), o(n) + o(n+1) = o(n)$.

▷ **Equivalents notoires :**
Il faut connaitre les équivalents suivants. Si vous les oubliez, sachez qu'ils proviennent tous du résultat suivant, valable pour toute suite tendant vers 0, et toute fonction f dérivable en 0 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = f'(0).$$

On transforme alors cette limite en équivalent, si $f'(0) \neq 0$, que l'on multiplie par u_n. Par exemple, pour toute suite $(u_n)_n$ convergeant vers 0,

$$\begin{array}{rcl} \ln(1+u_n) & \sim & u_n, \\ \sin u_n & \sim & u_n, \\ 1 - \cos u_n & \sim & \dfrac{u_n^2}{2}, \\ e^{u_n} - 1 & \sim & u_n, \\ (1+u_n)^a - 1 & \sim & au_n, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^* \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \sim & \ln n. \end{array}$$